

Aufgabe 4: Stetige stückweise lineare Funktionen

Motivation und Definition: An der Approximation mit Haar-Funktionen ist störend, dass die Treppenfunktionen keine stetigen Funktionen sind. Man kann auf die Idee kommen, ähnlich einfach gebaute Funktionen zu verwenden, die aber zudem stetig sind. Das führt auf die *stetigen und stückweise linearen* Funktionen. Das sind Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf jedem dyadischen Intervall $I_{0,k} = [k, k+1)$ linear sind, also auf jedem $I_{0,k}$ durch einen linearen Term $f(t) = a_k \cdot t + b_k$ gegeben sind. An jeder Intervallgrenze zwischen $I_{0,k-1}$ und $I_{0,k}$ wird die Stetigkeit durch die Bedingung

$$f(k + 1) = a_{k-1} \cdot k + b_{k-1} = a_k \cdot k + b_k$$

erzwungen. Eine solche Funktion ist also durch die Folge ihrer Funktionswerte an den Intervallgrenzen $(f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ vollständig bestimmt.

Eine typische Funktion dieser Art sieht grafisch dargestellt so aus

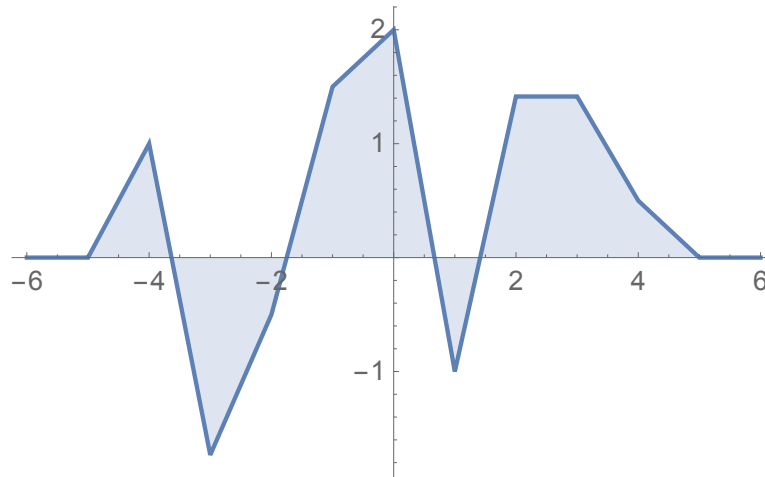


Abbildung 1: Plot einer stetigen stückweise linearen Funktion $f(t)$, die definiert ist durch $(\dots, 0, 0, 1, -\sqrt{3}, -0.5, 1.5, \underline{2}, -1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0.5, 0, 0, \dots)$. Die Position von $f(0)$ durch *underline* markiert.

Die stetigen stückweise linearen Funktionen bilden offensichtlich einen Vektorraum Λ , der allerdings sehr groß ist, nämlich überabzählbare Dimension hat. Man wird sich daher für praktische Zwecke meist auf den Unterraum $\mathcal{V}_0 = \Lambda \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ der quadrat-integrierbaren beschränken, der abzählbare Dimension hat.

1. Die einfachste Funktion (abgesehen von der Konstanten 0) in Λ ist die "Hut-Funktion"

$$h(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{falls } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$h(t)$ gehört natürlich auch zu $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Zeigen Sie, dass die Hutfunktion einer einfachen *Skalierungsgleichung* genügt:

$$h(t) = a_{-1} \cdot h(2t + 1) + a_0 \cdot h(2t) + a_1 \cdot h(2t - 1).$$

Bestimmen Sie die zugehörigen Konstanten a_{-1}, a_0, a_1 .

2. Berechnen und plotten Sie die Fouriertransformierte $\widehat{h}(s)$.
3. Mit $h_k = T_k h$ werden die Translate der Hut-Funktion bezeichnet, also $h_k(t) = h(t - k)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Die $h_k(t)$ gehören natürlich wie $h = h_0$ ebenfalls zu \mathcal{V}_0 .

Zeigen Sie, dass die Familie $\{h_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ linear-unabhängig ist und sich jede Funktion $f \in \Lambda$ eindeutig in der Form

$$(*) \quad f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k h_k(t)$$

mit Konstanten $c_k \in \mathbb{R}$ schreiben lässt.¹ Welchen Wert haben die c_k ?

4. Berechnen Sie die inneren Produkte $\langle h_k | h_\ell \rangle$ (mit dem üblichen inneren Produkt von $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$). Das zeigt quantitativ die unmittelbar einleuchtende Tatsache, dass die Familie $\{h_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ nicht orthogonal ist.
5. Berechnen Sie

$$\int_k^{k+1} |f(t)|^2 dt$$

für eine auf dem Intervall $I_{0,k}$ definierte lineare Funktion $f(t)$. Das Ergebnis soll mit Hilfe der Randwerte $f(k)$ und $f(k+1)$ ausgedrückt werden.

6. Verwenden Sie das Resultat der vorigen Teilaufgabe, um folgende Abschätzung zu zeigen:

$$\frac{1}{6} (f(k)^2 + f(k+1)^2) \leq \int_k^{k+1} |f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2} (f(k)^2 + f(k+1)^2).$$

Durch Summation über alle Intervalle $I_{0,k}$ ($k \in \mathbb{Z}$) ergibt sich für $f(t) \in \Lambda$ die Aussage

$$f(t) \in \mathcal{V}_0 \quad \Leftrightarrow \quad (f(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2 \quad (\text{d.h. } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k)|^2 < \infty).$$

7. Aus der vorigen Teilaufgabe ergibt sich die Aussage, dass die unendliche Summe in (*) der Teilaufgabe 3. im \mathcal{L}^2 -Sinne konvergiert. Die Familie $\{h_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ist zwar keine Hilbert-Basis von \mathcal{V}_0 (weil sie nicht orthogonal ist), aber ansonsten gelten alle "schönen" Aussagen, z.B. dass jede Funktion aus \mathcal{V}_0 durch endliche Summen $\sum_k c_k h_k(t)$ im \mathcal{L}^2 -Sinne beliebig gut approximiert werden kann.
8. Für \mathcal{L}^2 -Funktionen $f(t)$ ist $g(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(s+n)|^2$ eine 1-periodische Funktion, sollte sich also als Fourierreihe darstellen lassen. Es gilt generell²

$$\langle f | T_k f \rangle = \int_0^1 g(s) e^{2\pi i k s} ds,$$

und daraus ergibt sich

$$g(s) = \sum_k \langle f | T_k f \rangle e^{-2\pi i k s}.$$

Die Funktion $g(s)$ enthält also die komplette Information über die inneren Produkte $\langle f | T_k f \rangle$ von $f(t)$ mit seinen Translate $(T_k f)(t)$ (und ist deshalb sehr nützlich).

Berechnen Sie diese Funktion für die Hut-Funktion, also für $f(t) = h(t)$.

¹Keine Sorge! Die unendliche Summe ist unproblematisch, da für jeden festen Wert von t nur endlich-viele der h_k einen Beitrag liefern.

²Wenn Sie sehr sportlich sind, versuchen Sie es zu beweisen. Wenn Sie weniger sportlich, aber neugierig sind, schauen Sie auf Seite 301 im Skript nach.